

SÉPARATION DES REPRÉSENTATIONS PAR DES SURGROUPES QUADRATIQUES

DIDIER ARNAL⁽¹⁾, MOHAMED SELMI⁽²⁾ ET AMEL ZERGANE⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

Résumé

A une représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie G , on sait associer un ensemble moment I_π , partie du dual \mathfrak{g}^* de l'algèbre de Lie G . Malheureusement, cet ensemble ne caractérise pas la représentation π . Cependant, il est parfois possible de construire un surgroupe G^+ de G , d'associer à π , une représentation π^+ de G^+ tels que I_{π^+} caractérise π , au moins pour les représentations π génériques. Si cette construction n'utilise que les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, on dit que G^+ est un surgroupe quadratique. Dans cet article, on établit l'existence de tels surgroupes quadratiques pour de classes variées de groupe G .

Abstract

Let π be an unitary irreducible representation of a Lie group G . π defines a moment set I_π , subset of the dual \mathfrak{g}^* of the Lie algebra of G . Unfortunately, I_π does not characterize π .

However, we sometimes can find an overgroup G^+ for G , and associate, to π , a representation π^+ of G^+ in such a manner that I_{π^+} characterizes π , at least for generic representations π . If this construction is based on polynomial functions with degree at most 2, we say that G^+ is a quadratic overgroup for G .

In this paper, we prove the existence of such a quadratic overgroup for many different classes of G .

1. INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie, \mathfrak{g}^* le dual de son algèbre de Lie, (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire irréductible de G et \mathcal{H}^∞ l'ensemble des vecteurs C^∞ de π . L'ensemble moment de π est par définition :

$$I_\pi = \left\{ \ell \in \mathfrak{g}^*, \exists v \in \mathcal{H}^\infty \setminus \{0\}, \ell(X) = \frac{1}{i} \frac{\langle \pi(X)v, v \rangle}{\|v\|^2} \right\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 37J15, 22E45, 22E27, 22D30.

Key words and phrases. Application moment, Représentations des groupes de Lie, Surgroupe quadratique.

Ce travail a été réalisé dans le cadre des accords Hubert Curien Utique numéro 06/S 1502 et 09/G 1502 (CMCU).

D.Arnal remercie la faculté des sciences de Monastir pour son accueil chaleureux lors de ses séjours en Tunisie, M.Selmi remercie l'université de Bourgogne pour son accueil lors de ses séjours en France, A.Zergane remercie l'université de Bourgogne pour son aide et son accueil lors de ses séjours en France.

En général, I_π est l'enveloppe convexe fermée d'une orbite coadjointe \mathcal{O}_π associée à π (c.f [A-L]) :

$$I_\pi = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi).$$

Malheureusement, il existe de nombreux exemples d'orbites coadjointes distinctes \mathcal{O} et \mathcal{O}' telle que $\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}) = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}')$. L'ensemble moment I_π ne caractérise donc en général pas la représentation π , même si on se restreint aux représentations génériques de G .

Dans [A-S], on suppose G exponentiel et on propose de considérer un surgroupe G^+ de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g}^+ , une application φ de \mathfrak{g}^* dans $(\mathfrak{g}^+)^*$, non linéaire, telle que si p est l'opérateur restriction $p : (\mathfrak{g}^+)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$. De plus, on introduit une application $\Phi : \hat{G} \rightarrow \widehat{G^+}$ telle que, pour les orbites correspondantes $\mathcal{O}_{\Phi(\pi)} = \varphi(\mathcal{O}_\pi)$, et que $I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$ si et seulement si $\pi \simeq \pi'$.

Malheureusement, l'application φ n'est pas régulière et dépend de beaucoup de choix. Par contre des exemples sont donnés pour lesquels une application φ quadratique suffit pour séparer les représentations génériques de G .

L'objet de ce travail est de généraliser ce procédé à des classes de groupes pas nécessairement résolubles mais en imposant à φ d'être polynomiale de degré inférieure ou égale à 2. On dira alors que le surgroupe G^+ est quadratique.

On cherche ici des critères qui garantissent l'existence d'un surgroupe quadratique et d'une application Φ qui permettent de séparer les représentations unitaires irréductibles génériques de G .

Plus précisément, on établit d'abord un lemme de stricte convexité, une application quadratique permet essentiellement de passer de l'enveloppe convexe d'une partie A de \mathbb{R}^n à la partie elle même.

Si G est exponentiel spécial, on applique ce lemme à l'ensemble moment d'une représentation induite π de G et à un surgroupe construit à partir d'un idéal abélien \mathfrak{a} bien placé de G . On montre alors qu'un surgroupe quadratique et une application Φ séparant les représentations génériques de G existent.

Supposons maintenant G nilpotent connexe et simplement connexe. Si G est spécial ou si les fonctions polynomiales invariantes sur \mathfrak{g}^* qui séparent les orbites génériques sont de degré inférieur ou égal à 2, puis si G est nilpotent simplement connexe et de dimension inférieure ou égale à 6, on montre que G admet un surgroupe quadratique.

On étudie ensuite les cas des groupes résolubles de dimension inférieure ou égale à 4, puis le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ et de son revêtement universel et l'exemple d'un produit semi direct $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ avec des invariants de degré élevé. Dans chaque cas, on construit explicitement un surgroupe quadratique.

2. UNE PROPRIÉTÉ DE STRICTE CONVEXITÉ

Le but de ce paragraphe est la preuve de :

Lemme 2.1. *Soit φ la fonction définie par :*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$$

et p la projection canonique $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors si $\overline{\text{Conv}}(B)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de la partie B de \mathbb{R}^{2n} ,

$$p(\overline{\text{Conv}}(\varphi(A)) \cap \varphi(\mathbb{R}^n)) = \bar{A}.$$

Preuve

Notons $\varphi(X) = (X, X^2)$. Soit $\varphi(X) \in \overline{\text{Conv}}(\varphi(A)) \cap \varphi(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe q , $X^1, \dots, X^q \in A$ et $t_1, \dots, t_q > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^q t_j = 1 \text{ et}$$

$$\|(X, X^2) - \sum_{j=1}^q t_j (X^j, (X^j)^2)\|_{2n}^2 < \varepsilon^2.$$

où $\|\cdot\|_{2n}$ est la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^{2n} .

On a alors :

$$\sum_{k=1}^n |x_k - \sum_{j=1}^q t_j x_k^j|^2 + \sum_{k=1}^n |x_k^2 - \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2|^2 < \varepsilon^2. \quad (*)$$

Pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$, on considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^q :

$$v_k = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} x_k^1 \\ \vdots \\ \sqrt{t_q} x_k^q \end{pmatrix} \text{ et } w_k = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} \\ \vdots \\ \sqrt{t_q} \end{pmatrix}$$

La borne inférieure de $\|v_k + s w_k\|_q^2$, ($s \in \mathbb{R}$) est atteinte au point

$$s_k = -\langle v_k, w_k \rangle = -\sum_{j=1}^q t_j x_k^j, \text{ elle vaut}$$

$$a_k = \inf_{s \in \mathbb{R}} \|v_k + s w_k\|_q^2 = \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2 - \left(\sum_{j=1}^q t_j x_k^j \right)^2. \quad (**)$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. La relation (*) s'écrit :

$$\|X + Y\|_n^2 + \|X^2 - \sum_{j=1}^q t_j (X^j)^2\|_n^2 < \varepsilon^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k^2 - (\sum_{j=1}^q t_j x_k^j)^2| &= \sum_{k=1}^n |(x_k^2) - (s_k)^2| = \sum_{k=1}^n |x_k - s_k| |x_k + s_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (2|x_k| + \varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 2\sqrt{n}\|X\|_n \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2 - (\sum_{j=1}^q t_j x_k^j)^2 \right) \\ &\leq (\varepsilon^2 + 2\sqrt{n}\|X\|_n \varepsilon) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q (t_j (x_k^j)^2 - x_k^2) \leq \varepsilon^2 + \sqrt{n}\varepsilon(2\|X\|_n + 1). \end{aligned}$$

Mais

$$a_k = \|v_k + s_k w_k\|_q^2 = \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j + s_k)^2,$$

on a donc :

$$0 \leq \sum_{j=1}^q t_j \sum_{k=1}^n (x_k^j + s_k)^2 = \sum_{j=1}^q t_j \|X^j + Y\|_n^2 \leq \varepsilon^2 + \sqrt{n}\varepsilon(2\|X\|_n + 1).$$

Choisissons j_0 tel que $\|X^{j_0} + Y\|_n = \min_j \|X^j + Y\|_n$, on a :

$$\|X^{j_0} + Y\|_n^2 \leq \sum_{j=1}^q t_j \|X^j + Y\|_n^2 < \varepsilon(\varepsilon + \sqrt{n}(2\|X\|_n + 1)) = \varepsilon\varepsilon'.$$

Donc

$$\|X - X^{j_0}\|_n \leq 2\varepsilon' \quad \text{et} \quad X^{j_0} \in A.$$

D'où X appartient à \bar{A} . Ce qui prouve le lemme, puisque la réciproque est évidente (chaque X de \bar{A} est la limite d'une suite (X^k) de points de A , $X^k = p(X^k, (X^k)^2)$, et $(X^k, (X^k)^2) \in \text{conv}(\varphi(A))$).

3. LES GROUPES EXPONENTIELS SPÉCIAUX

Définition 3.1 (Algèbre spéciale). *Une algèbre de Lie résoluble \mathfrak{g} est dite spéciale si elle admet un idéal abélien \mathfrak{a} dont la codimension est la moitié de la dimension des orbites coadjointes génériques.*

Un groupe de Lie connexe G est dit spécial si son algèbre de Lie est spéciale.

Soit G un groupe de Lie spécial, alors l'idéal \mathfrak{a} est unique et fournit une polarisation pour tous les points ℓ de \mathfrak{g}^* tels que :

$$\frac{1}{2} \dim G.\ell = \text{codim } \mathfrak{a}.$$

En effet, soit $\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ une bonne suite de sous algèbres passant par \mathfrak{a} et $\mathfrak{h}_\ell = \sum \mathfrak{g}_j(\ell|_{\mathfrak{g}_j})$ la polarisation de M.Vergne en ℓ correspondante. Par construction, $\mathfrak{g}_k(\ell_k) = \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_\ell$ et $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{h}_\ell$ donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_\ell$.

Soit alors $\mathfrak{g}_{gen}^* = \{\ell, \dim G.\ell = \text{codim } \mathfrak{a}\}$, c'est un ouvert de Zariski, G -invariant, non vide de \mathfrak{g}^* .

Supposons maintenant que G est exponentiel et spécial. Dans ce cas G possède un surgroupe quadratique (c.f [A-S]).

Théorème 3.1. *Soit G un groupe de Lie exponentiel et spécial, \mathfrak{a} l'idéal abélien de \mathfrak{g} de codimension $\frac{1}{2} \max_{\ell \in \mathfrak{g}^*} (\dim G.\ell)$, \mathfrak{m} l'espace vectoriel $S^2(\mathfrak{a})$ vu comme un groupe additif. Notons $\widehat{G_{gen}}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G associées aux orbites de \mathfrak{g}_{gen}^* .*

On définit :

$$G^+ = G \ltimes \mathfrak{m}$$

avec l'action : $Ad_g(XY) = Ad_g X Ad_g Y$, $(X, Y \in \mathfrak{a})$,

$$\varphi : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{m}^*$$

par $\varphi(\ell) = (\ell, (\ell|_{\mathfrak{a}})^2)$, si $(\ell|_{\mathfrak{a}})^2(XY) = \ell(X)\ell(Y)$,

$$\Phi : \widehat{G_{gen}} \rightarrow \widehat{G^+}$$

en prenant pour $\Phi(\pi)$ l'unique prolongement irréductible de π à G^+ . Alors, G^+ est un surgroupe quadratique de G .

On rappelle ici rapidement la preuve de [A-S] pour être complet :

Preuve

D'abord le dual unitaire \widehat{G} d'un groupe exponentiel est homéomorphe avec l'ensemble \mathfrak{g}^*/G de ses orbites coadjointes. L'ensemble $\widehat{G_{gen}}$ est donc dense dans \widehat{G} pour sa topologie naturelle. De plus on sait (c.f [A-L]) que l'ensemble moment de la représentation π associée à l'orbite \mathcal{O}_π est

$$I_\pi = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi).$$

On montre alors que (c.f [A-S]), pour tout ℓ de \mathfrak{g}_{gen}^* ,

$$G^+(\varphi(\ell)) = \varphi(G.\ell).$$

Si p est la restriction canonique $p : (\mathfrak{g}^+)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, on déduit de $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$, que p est un difféomorphisme de l'orbite coadjointe de $\varphi(\ell)$ sur celle de ℓ , pour tout ℓ de \mathfrak{g}_{gen}^* .

Soit $\pi \in \widehat{G_{gen}}$, il existe donc $\ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*$ tel que si $f = \ell|_{\mathfrak{a}}$, $\pi = \text{Ind}_{\exp(\mathfrak{a})}^G e^{if}$. Posons

$$\Phi(\pi) = \text{Ind}_{\exp(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{m}}^{G^+} e^{i(f, f^2)}.$$

(ici on a noté (f, f^2) la restriction de $\varphi(\ell)$ à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$).

$\Phi(\pi)$ se réalise sur le même espace de Hilbert que π et $\Phi(\pi)$ est une extension de π . On en déduit que $\Phi(\pi)$ est irréductible, de plus $\Phi(\pi)$ est une représentation induite, son ensemble moment est d'après [A-L] :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+ \cdot ((f, f^2) + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp)).$$

Mais $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ est un idéal de \mathfrak{g}^+ , et puisque G^+ est connexe :

$$g^+ \cdot ((\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp) = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp, \quad \forall g^+ \in G^+.$$

(Remarquons que G^+ peut ne pas être exponentiel) alors :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+ \cdot ((f, f^2)) + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp).$$

Maintenant, dans \mathfrak{g}^* , $\ell + \mathfrak{a}^\perp \subset G \cdot \ell$ donc, dans $(\mathfrak{g}^+)^*$, $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp$ est inclus dans $G^+ \cdot (\ell, f^2)$. On a donc :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+ \cdot (\ell, f^2)) = \overline{\text{Conv}}(G^+ \varphi(\ell)) = \overline{\text{Conv}}(\varphi(G \cdot \ell)).$$

Si π et π' sont deux représentations de $\widehat{G_{gen}^+}$ telles que

$$I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$$

alors, si π' est associée à l'orbite $G \cdot \ell'$:

$$I_{\Phi(\pi)} \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) = I_{\Phi(\pi')} \cap \varphi(\mathfrak{g}^*)$$

c'est-à-dire

$$(\overline{\text{Conv}}(\varphi(G \cdot \ell))) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) = (\overline{\text{Conv}}(\varphi(G \cdot \ell'))) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*)$$

et le lemme de stricte convexité donne $\overline{G \cdot \ell} = \overline{G \cdot \ell'}$.

Comme G est exponentiel, ses orbites sont ouvertes dans leurs adhérences donc $G \cdot \ell = G \cdot \ell'$ et $\pi = \pi'$.

4. LES GROUPES NILPOTENTS DE PETITE DIMENSION

4.1. Algèbres spéciales.

Dans cette partie, G est nilpotent, connexe et simplement connexe. Si son algèbre de Lie \mathfrak{g} est spéciale, on vient de voir que G admet un sous-groupe quadratique : c'est par exemple le cas de l'exemple de Wildberger de dimension 6 (on notera ici son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{6,13}$), (c.f [Wil] où des orbites coadjointes distinctes peuvent avoir la même enveloppe convexe).

Une algèbre de Lie est dite indécomposable si elle n'est pas la somme directe de deux idéaux. Les algèbres nilpotentes indécomposables réelles \mathfrak{g} telles que $\dim \mathfrak{g} \leq 6$ sont connues (c.f [Mag, Gon]). Nous prenons ici la notation de [Mag].

La majorité de ces algèbres sont spéciales. A un isomorphisme complexe près, avec les notations de [Mag], les algèbres indécomposables

spéciales de dimension inférieure ou égale à 6 sont :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal \mathfrak{a}
\mathfrak{g}_1	\mathfrak{g}_1 est abélienne	\mathfrak{g}_1
\mathfrak{g}_3	$[X_1, X_2] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
\mathfrak{g}_4	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{5,1}$	$[X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,3}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,5}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,6}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{6,1}$	$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_4] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,2}$	$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_3, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,4}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,5}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,6}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_1, X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,7}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,8}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,9}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_5] = X_6, [X_3, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_1, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,10}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_3, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,11}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,12}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,13}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_5,$ $[X_3, X_4] = -X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,14}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

Algèbre	Relations de commutations	Idéal \mathfrak{a}
$\mathfrak{g}_{6,15}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,16}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,17}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,19}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

Il existe de plus quatre algèbres nilpotentes réelles de dimension inférieure ou égale à 6 qui sont isomorphes sur \mathbb{C} à une de ces algèbres, mais pas sur \mathbb{R} . Ces quatre algèbres sont toutes spéciales :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal \mathfrak{a}
$\mathfrak{g}_{6,5a}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,6a}$	$[X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,9a}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_4] = X_6, [X_3, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_1, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,15a}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = -X_6, [X_2, X_3] = X_5$ $[X_2, X_5] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

4.2. Invariants quadratiques.

On sait que l'algèbre $J(\mathfrak{g})$ des fonctions rationnelles sur \mathfrak{g} invariantes sous l'action de G est de la forme $\mathbb{R}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$, où les μ_j sont des fonctions polynomiales invariantes sur \mathfrak{g} (c.f [Ver]).

Lemme 4.1. *Si \mathfrak{g} est telle qu'on peut choisir les μ_j tous de degré au plus 2, alors G admet un surgroupe quadratique.*

Preuve

On pose $G^+ = G \times \mathbb{R}^r$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g}^* &\rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\mapsto (\ell, \mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell)) \end{aligned}$$

Les représentations génériques de G sont en bijection avec les orbites génériques \mathcal{O} de \mathfrak{g}^* , qui sont caractérisées par la valeur des μ_j sur \mathcal{O} (c.f [Ver]). Le groupe de Lie G^+ est nilpotent, connexe et simplement connexe. Si π est la représentation de G associée à une orbite générique

$G.\ell$ de \mathfrak{g}^* , on pose :

$$\Phi(\pi) = \pi \times e^{i(\mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell))}.$$

Par construction, $I_{\Phi(\pi)}$ est :

$$I_{\Phi(\pi)} = I_\pi \times \{\mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell)\}.$$

Cet ensemble caractérise donc bien $G.\ell$ et donc π . Par suite G^+ est un surgroupe quadratique pour G .

Parmi les algèbres non spéciales celles dont les invariants sont engendrés par des polynômes au plus quadratiques sont les suivantes :

On note $\ell = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ un point quelconque de \mathfrak{g}^* .

Algèbre	Relations de commutation	Invariants
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_2, X_3] = X_5$	$x_5, x_4,$ $\mu_1 = x_1x_5 - x_4x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$
$\mathfrak{g}_{6,3}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$x_6, x_5, x_4,$ $\mu_1 = x_6x_1 - x_5x_2 + x_4x_3$
$\mathfrak{g}_{6,18}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = X_6,$ $[X_3, X_4] = -X_6$	$x_6,$ $\mu_1 = x_6x_1 + x_3x_5 - \frac{x_4^2}{2}$

4.3. L'Algèbre $\mathfrak{g}_{6,20}$.

Il reste une seule algèbre de Lie nilpotente indécomposable, $\mathfrak{g}_{6,20}$, qui n'est pas spéciale et dont un des invariants est cubique :

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,20}$ définie par les relations :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, \\ [X_2, X_3] &= X_5, [X_2, X_5] = X_6, [X_3, X_4] = -X_6. \end{aligned}$$

Pour $\ell = (x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathfrak{g}_{6,20}^*$, on donne une paramétrisation de l'orbite $G.\ell$ au point $\ell_0 = (\lambda_1, 0, 0, 0, 0, \lambda_6)$, $\lambda_6 \neq 0$ par :

$$G.\ell_0 = \left\{ (\lambda_1 - p_1q_2 - \frac{\lambda_6}{6}q_2^3 + \frac{\lambda_6}{2}q_1^2, p_2, p_1 + \frac{\lambda_6}{2}q_2^2, -\lambda_6q_1, \lambda_6q_2, \lambda_6) \right\}$$

avec $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4$. Le polynôme invariant associé à λ_1 est donc cubique :

$$\mu_1 = x_1x_6^2 + x_3x_5x_6 - \frac{1}{3}x_5^3 - \frac{1}{2}x_4^2x_6.$$

Un calcul direct semblable à celui de [A-S] montre que les deux orbites génériques $\mathcal{O} = G.(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ et $\mathcal{O}' = G.(0, 0, 1, 0, \sqrt{3}, 1)$ ont même enveloppe convexe. Cependant :

Lemme 4.2. *Le groupe $G = \exp(\mathfrak{g}_{6,20})$ admet un surgroupe quadratique.*

Preuve

Puisque l'idéal $\mathfrak{a} = \text{Vect}(X_4, X_5, X_6)$ est abélien, on peut donc construire le groupe nilpotent :

$$G^+ = G \ltimes S^2(\mathfrak{a}) = G \ltimes \mathfrak{m}$$

comme ci-dessus. L'application $\varphi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$ définie, comme ci-dessus, par :

$$\varphi(\ell) = (\ell, f^2), \quad \text{si } f = \ell|_{\mathfrak{a}}$$

est quadratique, vérifie $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$ et $\varphi(G.\ell) = G^+(\varphi(\ell))$ pour tout ℓ dans $\mathfrak{g}_{gen}^* = \{\ell, x_6 \neq 0\}$.

Posons donc $\Phi(\pi) = \pi^+$, où π^+ est la représentation de $\widehat{G^+}$ associée à l'orbite $\varphi(G.\ell)$, π^+ est irréductible, c'est en fait une extension de π , réalisée dans le même espace.

Soient maintenant $\ell_0 = (\lambda_1, 0, 0, 0, 0, \lambda_6)$ dans \mathfrak{g}_{gen}^* . On note :

$$\varphi(\ell) = ((x_1, x_2, x_3), (f, f^2)) = ((x_1, x_2, x_3), \tilde{\varphi}(f))$$

et $q : (\mathfrak{g}^+)^* \longrightarrow \mathfrak{a}^* \oplus \mathfrak{m}^*$ la projection obtenue par restriction.

On a :

$$G^+(\varphi(\ell_0)) \subset \overline{\text{Conv}} G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*)).$$

Montrons l'inclusion réciproque :

Soit ℓ^+ dans $\overline{\text{Conv}} G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ℓ_1^+ dans $\text{Conv } G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))$ tel que $\|\ell^+ - \ell_1^+\| < \varepsilon$. Il existe des $t_j > 0$ tels que $\sum_j t_j = 1$ et :

$$\begin{aligned} \ell_1^+ = ((x_1, x_2, x_3), (f, f^2)) &= \sum_j t_j (g_j \ell_0, (g_j f_0)^2) \\ &= \sum_j t_j (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, (f, f^2)). \end{aligned}$$

Par stricte convexité de $u \longmapsto u^2$, on en déduit que si

$$g_j \ell_1^+ = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}, x_{6j})$$

alors $x_{6j} = x_6$ et $(\sum_j t_j x_{5j})^2 = \sum_j t_j x_{5j}^2 = x_5^2$. Donc, pour tout j ,

$$x_{5j} = x_5 \quad \text{et de même} \quad x_{4j} = x_4.$$

On en déduit la valeur de μ_1 sur ℓ_1^+ :

$$\begin{aligned} \mu_1(\ell_1^+) &= x_6^2 (\sum_j t_j x_{1j}) + x_5 x_6 (\sum_j t_j x_{3j}) - (\frac{1}{3} x_5^3 + \frac{1}{2} x_4^2 x_6) \\ &= \sum_j t_j \mu_1(g_j \ell_0) = \sum_j t_j \mu_1(\ell_0) = \mu_1(\ell_0) \end{aligned}$$

et donc ℓ_1^+ appartient à $G^+(\varphi(\ell_0))$. Mais cet ensemble est :

$$G^+(\varphi(\ell_0)) = \{ \ell^+ = ((x_1, x_2, x_3), (f, f^2)), \quad \mu_1(\ell^+) = \mu_1(\ell_0) \quad \text{et} \quad x_6 = \lambda_6 \}.$$

Il est fermé, d'où l'égalité.

Par suite, on conclut que si π et π' sont génériques telles que $I_{\pi^+} = I_{\pi'^+}$, et si π est associée à $G.\ell_0$, π' à $G.\ell'_0$, on a :

$$\begin{aligned} G.\ell_0 = p(\varphi(G.\ell_0)) &= p(\overline{\text{Conv}}G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))) \\ &= p(I_{\pi^+} \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))) \\ &= p(I_{\pi'^+} \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))) = G.\ell'_0 \end{aligned}$$

donc $\pi \cong \pi'$.

4.4. Les algèbres de dimension ≤ 6 .

Soit maintenant une algèbre nilpotente réelle \mathfrak{g} décomposable, de dimension inférieure ou égale à 6, c'est-à-dire \mathfrak{g} est le produit direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_k$ d'algèbres indécomposables, alors :

Lemme 4.3. *Si \mathfrak{g} est décomposable réelle de dimension inférieure ou égale à 6, alors $G = \exp \mathfrak{g}$ admet un surgroupe quadratique.*

Preuve

On fait cette preuve pour $k = 2$, le cas général est similaire.

En identifiant \mathfrak{g}^* à $\mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}_2^*$, posons $\mathfrak{g}_{gen}^* = \mathfrak{g}_{1gen}^* \times \mathfrak{g}_{2gen}^*$ et

$$G = \exp(\mathfrak{g}) = G_1 \times G_2 = \exp(\mathfrak{g}_1) \times \exp(\mathfrak{g}_2).$$

Notons G_1^+ (resp G_2^+) un surgroupe quadratique pour G_1 (resp G_2).

Pour tout $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ de \mathfrak{g}_{gen}^* , on a :

$$G.\ell = G_1.\ell_1 \times G_2.\ell_2 \quad \text{et} \quad \hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2.$$

En gardant les notations ci-dessus, on pose :

$$G^+ = G_1^+ \times G_2^+, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{et} \quad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2).$$

On vérifie immédiatement que G^+ est un surgroupe quadratique pour G . On a finalement prouvé :

Théorème 4.1. *Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à 6, alors G admet un surgroupe quadratique.*

5. LES GROUPES RÉSOLUBLES DE PETITE DIMENSION

5.1. Les groupes exponentiels.

Les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension au plus 4 ont été classées par J. Dozias (c.f [Doz] et [Ber], chapitre 8). Une telle algèbre \mathfrak{g} est exponentielle si ses racines sont de la forme $\rho(1+i\alpha)$, avec $\rho \in \mathfrak{g}^*$, α réel. Les algèbres exponentielles, indécomposables, non nilpotentes de dimension au plus 4 sont toutes spéciales, sauf une $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. On donne

ci-dessous leur liste et l'idéal \mathfrak{a} correspondant :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal \mathfrak{a}
\mathfrak{g}_2	$[X_1, X_2] = X_2$	$\text{vect}(X_2)$
$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha),$ $ \alpha \geq 1$	$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \alpha X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{3,3}$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha),$ $\alpha > 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = X_4,$ $[X_2, X_3] = X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,5}(\alpha, \beta),$ $-1 < \alpha \leq \beta < 0$ ou $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ou $(0 < \beta \leq 1 \text{ et } -1 \leq \alpha < 0)$	$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \alpha X_3,$ $[X_1, X_4] = \beta X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,6}(\alpha),$ $\alpha \neq 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = X_3 + X_4,$ $[X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,7}$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3 + X_4, [X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, \beta),$ $\alpha > 0, \beta \neq 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = \beta X_3 - X_4,$ $[X_1, X_4] = X_3 + \beta X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,9}(\alpha),$ $\alpha \neq 1, 0 < \alpha \leq 2$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = (\alpha - 1)X_2,$ $[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = \alpha X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = 2X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,11}(\alpha),$ $\alpha > 0$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = \alpha X_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3, [X_1, X_4] = 2\alpha X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$

L'algèbre $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ n'est pas spéciale mais ses orbites génériques ($x_4 \neq 0$) peuvent être paramétrées comme suit :

$$\ell = (\lambda_1 + pq, p, \lambda_4 q, \lambda_4) = (\lambda_1 + \frac{x_2 x_3}{x_4}, x_2, x_3, \lambda_4).$$

Ces orbites sont caractérisées par les valeurs de fonctions invariantes :

$$\lambda_4 = x_4, \quad \mu_1 = x_4 \lambda_1 = x_4 x_1 - x_2 x_3$$

qui sont polynomiales de degré inférieure ou égale à 2. Si \mathfrak{g} est une algèbre exponentielle décomposable, de dimension inférieure ou égale à 4, le même argument que dans le cas nilpotent nous fournit un surgroupe quadratique.

Proposition 5.1. *Tout groupe de Lie G exponentiel de dimension inférieure ou égale à 4 admet un surgroupe quadratique.*

5.2. Les groupes résolubles non exponentiels.

Si G est résoluble simplement connexe de dimension au plus 4, non exponentiel alors G est de type I (les orbites coadjointes sont ouvertes dans leurs adhérence), ses représentations unitaires irréductibles π sont données par la théorie d'Auslander-Kostant (c.f [A-K]). Elles sont associées à une orbite coadjointe $G.\ell$ et d'après [A-L] : $I_\pi = \overline{\text{Conv}} G.\ell$. Cependant, en général, plusieurs représentations inéquivalentes sont associées à la même orbite. L'objet géométrique naturellement associé à la représentation est un fibré au dessus de l'orbite. Si de plus la dimension de G est inférieure ou égale à 4, l'ensemble de ces fibrés pour les orbites génériques peut être représenté comme une partie M de $\mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, nous construirons donc un surgroupe de Lie résoluble G^{++} de G , une application polynomiale $\varphi^{++} : M \rightarrow (\mathfrak{g}^{++})^*$ de degré 2 et une application $\Phi : \hat{G} \rightarrow \widehat{G^{++}}$ telles que si $p(\ell^{++})$ est la restriction de $\ell^{++} \in (\mathfrak{g}^{++})^*$ à \mathfrak{g} :

$$p \circ \varphi^{++} = id_{\mathfrak{g}^*} \quad \text{et} \quad G^{++}\varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = \varphi^{++}(G.(\ell, \varepsilon)), \quad \forall \ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*.$$

Si $m = (\ell, \varepsilon) \in M$ caractérise la représentation $\pi \in \hat{G}$ alors $\Phi(\pi)$ est un prolongement canonique de π à G^{++} . Si π et π' dans $\widehat{G_{gen}}$ sont tels que $I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$ alors $\pi = \pi'$. Par extension, on dira alors que G admet un surgroupe quadratique.

En fait, il y a 4 algèbres résolubles non exponentielles, de dimension inférieure ou égale à 4 dont 3 sont spéciales, la dernière, $\mathfrak{g}_{4,11}(0)$ admet un invariant quadratique.

Algèbre	Relations de commutations	Idéal \mathfrak{a}
$\mathfrak{g}_{3,4}(0)$	$[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_4,$ $[X_2, X_3] = -X_4, [X_2, X_4] = X_3,$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0),$ $\alpha > 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = -X_4,$ $[X_1, X_4] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$

Algèbre	Relations de commutations	Invariants
$\mathfrak{g}_{4,11}(0)$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = -X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2$	$x_4,$ $\mu_1 = 2x_1x_4 - x_3^2 - x_2^2$

Avec les mêmes raisonnements que ci-dessus pour chacune de ces algèbres, on construit une suralgèbre \mathfrak{g}^+ et une application de degré 2, $\varphi^+ : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$, telle que $p \circ \varphi^+ = id_{\mathfrak{g}^*}$, $\varphi^+(G.\ell) = G^+\varphi(\ell)$.

Si $\overline{\text{Conv}}(G^+\varphi(\ell)) = \overline{\text{Conv}}(G^+\varphi(\ell'))$ alors $G.\ell = G.\ell'$, (ℓ et ℓ' dans \mathfrak{g}_{gen}^*). Pour les algèbres restantes, on paramétrise ci dessous les orbites génériques et on cacule le stabilisateur d'un point.

Par exemple, pour l'algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0)$, les orbites génériques sont les orbites des points :

$$\ell_0 = (0, \pm 1, r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r > 0$$

On peut paramétrer ces orbites ainsi : un point ℓ appartient à $G.\ell_0$ si et seulement si :

$$\ell = (p, \pm e^{\alpha q}, r \cos(q + \theta), r \sin(q + \theta)) \quad (p, q \in \mathbb{R}).$$

Le stabilisateur $G_{4,8}(\ell_0)$ du point ℓ_0 est connexe, c'est :

$$G_{4,8}(\ell_0) = \exp \left\{ \pm \frac{1}{\alpha} \Im(re^{i\theta}(x_3 + ix_4))X_2 + x_3X_3 + x_4X_4 \right\}$$

On obtient de même, pour les algèbres restantes, le tableau suivant :

Algèbre	Orbite générique $G.\ell_0$	$G(\ell_0)$
$\mathfrak{g}_{3,4}(0)$	$\ell_0 = (0, r, 0), r > 0$ $\ell = (p, r \cos q, r \sin q)$	$\exp \mathbb{R}X_2 \times \exp 2\pi\mathbb{Z}X_1$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$\ell_0 = (0, 0, 1, 0)$ $\ell = (p_2, p_1, e^{q_2} \cos q_1, e^{q_2} \sin q_1)$	$\exp 2\pi\mathbb{Z}X_2$
$\mathfrak{g}_{4,11}(0)$	$\ell_0 = (\lambda_1, 0, 0, \lambda_4)$ $\ell = (\lambda_1 + \frac{p^2 + \lambda_4^2 q^2}{2\lambda_4}, p, \lambda_4 q, \lambda_4)$	$\exp \mathbb{R}X_4 \times \exp \mathbb{R}X_1$

Pour les groupes connexes et simplement connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0)$ et $\mathfrak{g}_{4,11}(0)$, les orbites génériques sont simplement connexes, on leur associe une seule représentation unitaire irréductible, il n'est pas nécessaire de considérer de fibré M et la construction usuelle pour les algèbres spéciales s'applique directement : ces groupes admettent un surgroupe quadratique.

Pour les groupes simplement connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{3,4}(0)$ et $\mathfrak{g}_{4,2}$, les orbites coadjointes génériques ne sont pas simplement connexes. Il y a plusieurs représentations associées à une de ces orbites.

Plus exactement, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3,4}(0)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ est une polarisation en $\ell_0 = (0, r, 0)$, le caractère $e^{i\ell_0}$ défini sur $\exp \mathfrak{h}$ admet les prolongements suivants à $G(\ell_0) \cdot \exp \mathfrak{h}$:

$$\chi_{\ell_0, \varepsilon}(e^{2\pi k X_1} e^{x_2 X_2 + x_3 X_3}) = e^{2i\pi k \varepsilon + x_2 r}, \quad \varepsilon \in [0, 1[.$$

Pour chaque ε , la représentation $\pi_\varepsilon = \text{Ind}_{G(\ell_0) \cdot \exp \mathfrak{h}}^G \chi_{\ell_0, \varepsilon}$ est associée à l'orbite $G.\ell_0$. D'après [A-L], son ensemble moment est :

$$I_{\pi_\varepsilon} = \overline{\text{Conv}} G.\ell_0$$

qui ne dépend pas de ε .

On construit l'ensemble

$$M = \mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R} = \{(\ell, \varepsilon), \quad \ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

et on considère cet ensemble comme une partie de $(\mathfrak{g} \times \mathbb{R})^*$, on pose :

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g}^+ \times \mathbb{R}.$$

On définit les fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi^+ : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\longmapsto (\ell, r^2) \end{aligned}$$

$(r^2 = x_2^2 + x_3^2)$ et

$$\begin{aligned} \varphi^{++} : M &\longrightarrow (\mathfrak{g}^{++})^* \\ (\ell, \varepsilon) &\longmapsto (\ell, r^2, \varepsilon) \end{aligned}$$

alors

$$\varphi^{++}(G.(\ell_0, \varepsilon)) = G^{++}\varphi^{++}(\ell_0, \varepsilon), \quad \forall (\ell_0, \varepsilon) \in (\mathfrak{g}^*)_{gen} \times \mathbb{R}.$$

Et on définit

$$\Phi^{++}(\pi_\varepsilon) = \pi_\varepsilon \times e^{ir^2} \times e^{i\varepsilon}$$

donc

$$I_{\Phi^{++}(\pi_\varepsilon)} = I_{\pi_\varepsilon} \times \{(r^2, \varepsilon)\}.$$

Cet ensemble moment caractérise clairement la représentation π_ε .

Si maintenant, G est le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}$, il admet une seule orbite ouverte (et dense) $G.\ell_0 = \mathfrak{g}_{gen}^*$. A cette orbite est associée comme ci-dessus une famille de représentations π_ε de la forme $\text{Ind}_{G(\ell_0). \exp \mathfrak{h}\chi_\varepsilon}^G$, où

$$\mathfrak{h} = \text{Vect}(X_3, X_4) \quad \text{et} \quad \chi_\varepsilon(e^{2\pi k X_2}) = e^{i2\pi \varepsilon k}.$$

On pose

$$M = \mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R} = (\mathfrak{g} \times \mathbb{R})_{gen}^*, \quad \mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$$

et

$$\varphi^{++}(g.(\ell_0, \varepsilon)) = (g.\ell_0, \varepsilon), \quad \Phi^{++}(\pi_\varepsilon) = \pi \times e^{i\varepsilon}$$

Ainsi $I_{\pi_\varepsilon} = \mathfrak{g}^* \times \{\varepsilon\}$ caractérise clairement π_ε .

Si G est résoluble, de dimension inférieure ou égale à 4 et décomposable, le même argument que dans le cas nilpotent permet de construire le surgroupe G^{++} , l'application quadratique φ^{++} et l'application Φ^{++} . On peut donc dire :

Proposition 5.2. *Si G est résoluble, connexe et simplement connexe, de dimension inférieure ou égale à 4, G admet un surgroupe quadratique.*

5.3. Le groupe de Mautner.

Si G est résoluble de dimension 5, G peut ne pas être de type I . L'exemple le plus simple est donné par le groupe de Mautner G , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_4] = -\alpha X_4, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_5] = \alpha X_5,$$

avec α irrationnel.

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est spéciale, pour l'idéal $\mathfrak{a} = \text{Vect}(X_2, X_3, X_4)$. Une orbite générique est un cylindre de base une ficelle sur un tore \mathbb{T}^2 :

$$\begin{aligned} G.\ell_0 &= G.(0, r, 0, R \cos \theta, R \sin \theta) \\ &= \{(p, r \cos \theta, r \sin \theta, R \cos(\alpha q + \theta), R \sin(\alpha q + \theta))\} \end{aligned}$$

A cette orbite, on peut associer les représentations $\pi_{\ell_0} = \text{Ind}_{\exp \mathfrak{a}}^G e^{i\ell_0}$ dont l'ensemble moment est :

$$\begin{aligned} I_{\pi_{\ell_0}} &= \overline{\text{Conv} G \cdot \ell_0} \\ &= \{ \ell = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad x_2^2 + x_3^2 \leq r^2, \quad x_4^2 + x_5^2 \leq R^2 \} \\ &= \mathbb{R} \times \text{Conv}(\mathbb{T}^2) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de θ .

Supposons qu'il existe une suralgèbre \mathfrak{g}^+ , une application de degré au plus 2, $\varphi : \mathfrak{g}_{gen}^* \longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$ telle que $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}_{gen}^*}$, $\varphi(G \cdot \ell_0) = G^+ \cdot \varphi(\ell_0)$, montrons que cette application φ ne peut pas séparer les orbites deux points ℓ_0 et ℓ'_0 sur le tore \mathbb{T}^2 , c'est à dire de même r et R .

Si φ_{x_1} est l'application $\varphi_{x_1}(x_2, x_3, x_4, x_5) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, φ_{x_1} est une application polynomiale de degré inférieure ou égale à 2. Posons $K_{x_1} = \varphi_{x_1}(\mathbb{T}^2)$, c'est un compact. Puisque, pour tout ℓ_0 de \mathbb{T}^2 et tout x_1 réel, $G \cdot \ell_0 \cap (\{x_1\} \times \mathbb{R}^4)$ est dense dans $\{x_1\} \times \mathbb{T}^2$ et que l'orbite est un cylindre alors $\overline{\varphi(G \cdot \ell_0)} = \bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}} K_{x_1}$.

Si ℓ_0 et ℓ'_0 sont deux points du tore, les adhérences de l'image par φ de leurs orbites coïncident et on ne peut pas séparer ces orbites par les enveloppes convexes fermées de leur image par φ .

Le groupe de Mautner n'admet pas alors de surgroupe quadratique.

6. LE GROUPE DE LIE $G = SL(2, \mathbb{R})$

Le premier exemple de groupe non résoluble et non compact est le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ ou son revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a pour base :

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutations :

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = X_2.$$

6.1. Représentations associées aux orbites.

On ne s'intéresse ici qu'aux représentations génériques appelées depuis [Barg], série principale et série discrète.

6.1.1. *Série principale.* On note $\pi_{\mu, \varepsilon}$, $\mu > 0$, $\varepsilon = 0, 1$, la représentation de la série principale dont l'orbite associée est

$$\mathcal{O}_\mu = \{ \ell = (x, y, z), \quad x^2 + y^2 - z^2 = \mu^2 \}$$

L'orbite \mathcal{O}_μ est l'hyperboloïde à une nappe. Cette représentation est réalisée dans l'espace $L^2([0, 4\pi])$ dont la base orthogonale est

$$\varphi_n(\theta) = e^{in\theta/2}, n \text{ pair (si } \varepsilon = 0), n \text{ impair (si } \varepsilon = 1).$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est :

$$\begin{aligned} d\pi_{\mu,\varepsilon}(X_3)\varphi_n &= \frac{in}{2}\varphi_n \\ d\pi_{\mu,\varepsilon}(X_2)\varphi_n &= \frac{1}{4i}((1+i\mu+n)\varphi_{n+2} - (1+i\mu-n)\varphi_{n-2}) \\ d\pi_{\mu,\varepsilon}(X_1)\varphi_n &= \frac{1}{4}((1+i\mu+n)\varphi_{n+2} + (1+i\mu-n)\varphi_{n-2}) \end{aligned}$$

L'ensemble moment est, pour tout μ et tout ε :

$$I_{\pi_{\mu,\varepsilon}} = \mathfrak{g}^* = \text{Conv}(\mathcal{O}_\mu).$$

6.1.2. *Série discrète holomorphe.* On note π_m , $m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $m > \frac{1}{2}$, la représentation de la série discrète dont l'orbite associée est

$$\mathcal{O}_m = \{\ell = (x, y, z), \ x^2 + y^2 - z^2 = -m^2 \text{ et } z < 0\}.$$

Pour tout $m > 0$, \mathcal{O}_m est une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes et \mathcal{O}_m est associée à une représentation seulement si elle est entière, c'est à dire si $2m$ est entier et $m > \frac{1}{2}$. Cette représentation est réalisée dans l'espace $L_{hol}^2(\mathbb{D}, \mu_m)$ des fonctions holomorphes sur le disque unité

$$\mathbb{D} = \{w = u + iv, \quad |w|^2 < 1\}$$

de carré intégrable pour la mesure μ_m du disque unitaire \mathbb{D} donnée par $\mu_m = \frac{4}{4^m}(1 - |w|^2)^{2m-2}dudv$ et dont la base orthogonale est

$$\varphi_n(w) = w^n, \ n \in \mathbb{N}, \ w \in \mathbb{D} \text{ et } \|\varphi_n\|^2 = \frac{\pi}{4^{m-1}} \frac{(2m-2)!n!}{(2m+n-1)!}.$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est la suivante :

$$\begin{aligned} d\pi_m(X_3)w^n &= -i(n+m)w^n \\ d\pi_m(X_2)w^n &= \frac{(-1)^m}{2}i((n+2m)w^{n+1} + nw^{n-1}) \\ d\pi_m(X_1)w^n &= \frac{(-1)^m}{2}((n+2m)w^{n+1} - nw^{n-1}) \end{aligned}$$

L'ensemble moment permet de retrouver m , c'est :

$$I_{\pi_m} = \{\ell = (x, y, z), \ x^2 + y^2 - z^2 \leq -m^2 \text{ et } z < 0\} = \text{Conv}(\mathcal{O}_m).$$

(Ici, nous avons choisi d'associer à l'orbite \mathcal{O}_m une représentation induite holomorphe "non tordue". L'égalité ci-dessus est la raison de ce choix).

6.1.3. *Série discrète antiholomorphe.* Il suffit de remplacer dans la série discrète holomorphe m par $-m$ et w par \bar{w} . L'ensemble moment de π_{-m} est :

$$I_{\pi_{-m}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_{-m}) = \{\ell = (x, y, z), x^2 + y^2 - z^2 \leq -m^2 \text{ et } z > 0\}.$$

En plus de ces représentations, il y a la représentation triviale, les représentations limites de la série discrète, limite de la série principale et celles de la série complémentaire. Ici nous ne considérerons pas ces représentations "non génériques".

6.2. Définition de G^+ et séparation des orbites.

Soient

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \quad \text{et} \quad G^+ = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

Le sous groupe \mathbb{R} est central dans G^+ donc toute représentation unitaire irréductible π^+ de G^+ est scalaire sur ce sous groupe et par conséquent sa restriction à $SL(2, \mathbb{R})$: $\pi^+_{|SL(2, \mathbb{R})}$ est irréductible.

Réciproquement, toute représentation irréductible π de $SL(2, \mathbb{R})$ se prolonge en des représentations $\pi^+_\alpha = \pi \times e^{i\alpha}$ de G^+ . On a alors $I_{\pi^+_\alpha} = I_\pi \times \{\alpha\}$.

On se donne aussi l'application non linéaire de degré 2 :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathfrak{g}^* &\rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ (x, y, z) &\mapsto ((x, y, z), x^2 + y^2 - z^2) = (\ell, \mu^2(\ell)) \end{aligned}$$

Soit $p : (\mathfrak{g}^+)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la projection canonique, transposé de l'injection canonique de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}^+ , alors $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$ et puisque la fonction μ^2 est invariante, alors :

$$\varphi(G.\ell) = G^+\varphi(\ell) \quad \text{et} \quad \Phi(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon} \times e^{i\mu^2}, \quad \Phi(\pi_{\pm m}) = \pi_{\pm m} \times e^{im^2}.$$

On notera :

$$\widehat{G}_{gen} = \{\pi_{\mu, \varepsilon}\} \cup \{\pi_{\pm m}\}.$$

Proposition 6.1. *Soient π et π' dans \widehat{G}_{gen} telles que :*

$$I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$$

alors :

- 1) *Les orbites coadjointes associées à π et π' coïncident.*
- 2) *Ou bien π et π' sont toutes deux dans la série principale et*

$$\pi = \pi_{\mu, \varepsilon}, \quad \pi' = \pi'_{\mu, \varepsilon'}, \quad (\varepsilon = \varepsilon' \text{ ou } \varepsilon \neq \varepsilon').$$

- 3) *Ou bien π et π' sont toutes les deux dans la série discrète et $\pi \cong \pi'$.*

Remarque:

Comme dans le cas résoluble non exponentiel, on sait associer à une représentation une orbite mais à certaines orbites on associe deux représentations. On a maintenant séparé les orbites mais pas les représentations. On les sépare dans la section suivante, en appliquant une méthode similaire à celle des sections précédentes.

6.3. Définition de G^{++} et séparation des représentations.

Soit

$$G^{++} = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Son algèbre de Lie est :

$$\mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi^+ : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\longmapsto (\ell, \mu^2). \end{aligned}$$

On construit les ensembles :

$$M = \left\{ (\ell, \varepsilon), \ell \in \mathfrak{g}^*, \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu^2 < 0 \\ \varepsilon & \text{si } \mu^2 \geq 0, \ell \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ell = 0 \end{cases} \right\}$$

$$M^{++} = \{(\ell, t, \varepsilon), \ell \in (\mathfrak{g}^+)^*, \varepsilon = \pm 1\}$$

On prolonge l'application φ^+ en $\varphi^{++} : M \rightarrow M^{++}$ en posant

$$\varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = (\ell, \mu^2(\ell), \varepsilon).$$

On a :

$$\varphi^{++}(g \cdot (\ell, \varepsilon)) = g \cdot \varphi^{++}(\ell, \varepsilon).$$

On note enfin :

$$\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon}^{++}, \quad \text{où } \pi_{\mu, \varepsilon}^{++}(g, t, s) = \chi_\varepsilon(s) e^{it\ell^2} \pi_{\mu, \varepsilon}, \quad \chi_\varepsilon(s) = s^\varepsilon.$$

et

$$\Phi^{++}(\pi_m) = \pi_m^{++}, \quad \text{où } \pi_m^{++}(g, t, s) = e^{itm^2} \pi_m(g).$$

Proposition 6.2. 1) On a :

$$I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = I_{\Phi^+(\pi_{\mu, \varepsilon})} = \varphi^+(\mathcal{O}_\mu) \quad \text{et} \quad I_{\Phi^{++}(\pi_m)} = \varphi^+(\mathcal{O}_m).$$

$$2) \varphi^{++}(I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\varepsilon\}) = I_{\Phi^+(\pi_{\mu, \varepsilon})} \times \{\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \varphi^{++}(I_{\pi_m}) = I_{\Phi^+(\pi_m)} \times \{0\}.$$

$$3) \text{ Si } \varphi^{++}(I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\varepsilon\}) = \varphi^{++}(I_{\pi_{\mu', \varepsilon'}} \times \{\varepsilon'\}) \text{ alors } \pi_{\mu, \varepsilon} = \pi_{\mu', \varepsilon'}.$$

$$4) \text{ Si } \pi \text{ et } \pi' \text{ sont dans } \widehat{G_{gen}} \text{ alors}$$

$$I_{\Phi^{++}(\pi)} = I_{\Phi^{++}(\pi')} \quad \text{si et seulement si } \pi \cong \pi'.$$

On a ainsi prouvé que $SL(2, \mathbb{R})$ admet un surgroupe quadratique G^{++} (non connexe).

Cependant, dans cette construction, l'algèbre \mathfrak{g}^{++} de G^{++} coïncide avec \mathfrak{g}^+ . L'existence du surgroupe quadratique G^{++} et de l'application Φ^{++} utilise l'identification de ε qui ne provient pas d'une application moment habituelle. Cette construction diffère donc de celle de la section précédente pour les groupes résolubles de petite dimension. Elle ne s'applique pas non plus au revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Pour ces raisons, on considère maintenant un autre surgroupe quadratique (connexe) pour $SL(2, \mathbb{R})$. On pose :

$$G^{++} = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$$

et

$$\varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = (\ell, \mu^2(\ell), \varepsilon).$$

Donc

$$\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon} \times e^{i\mu^2} \times e^{i\varepsilon}, \quad \Phi^{++}(\pi_m) = \pi_m \times e^{im^2}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} &= \varphi^{++}(I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\varepsilon\}) = I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{(\mu^2, \varepsilon)\} \\ \text{et } I_{\Phi^{++}(\pi_m)} &= I_{\pi_m} \times \{(m^2, 0)\} \end{aligned}$$

Ainsi, G^{++} définit un surgroupe quadratique de $SL(2, \mathbb{R})$.

Proposition 6.3. *On a :*

$$I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu', \varepsilon'})} \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_{\mu, \varepsilon} = \pi_{\mu', \varepsilon'}$$

6.4. Le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$.

Notons $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Les représentations $\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}$, ($\varepsilon \in [0, 2[$) de la série principale de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ se réalisent dans $L^2([0, 4\pi[)$, mais au lieu de considérer une base (φ_n) telle que :

$$\varphi_n(2\pi) = \pm \varphi_n(0) = e^{i\pi\varepsilon} \varphi_n(0), \quad \varepsilon = 0, 1,$$

on considèrera une base (φ_n) de fonctions telles que :

$$\varphi_n(2\pi) = e^{i\pi\varepsilon} \varphi_n(0), \quad \varepsilon \in [0, 2[.$$

Par exemple :

$$\varphi_n(\theta) = e^{i\theta(n + \frac{\varepsilon}{2})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ s'écrira alors :

$$\begin{aligned} d\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}(X_3)\varphi_n &= i(n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_n \\ d\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}(X_2)\varphi_n &= \frac{1}{4i} \left((1 + i\mu + n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n+2} - (1 + i\mu - n - \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n-2} \right) \\ d\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}(X_1)\varphi_n &= \frac{1}{4} \left((1 + i\mu + n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n+2} + (1 + i\mu - n - \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n-2} \right). \end{aligned}$$

Son ensemble moment est toujours :

$$I_{\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_\mu) = \mathfrak{g}^*.$$

Pour la série discrète holomorphe $\tilde{\pi}_m$ et antiholomorphe $\tilde{\pi}_{-m}$, elles se réalisent dans l'espace $L^2(\mathbb{D}, \mu_m)$ des fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} , pour la mesure $\mu_m = \frac{4}{4^m}(1 - |w|^2)^{2m-2}$, mais pour tous les $m > \frac{1}{2}$.

Les formules sont les mêmes que pour la série discrète de $SL(2, \mathbb{R})$, l'ensemble moment est l'enveloppe convexe :

$$I_{\tilde{\pi}_{\pm m}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_{\pm m}) = \{ \ell = (x, y, z), \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq -m^2, \quad \pm z < 0 \}$$

(Il n'y a plus de condition d'intégralité sur l'orbite \mathcal{O}_m).

Posons donc :

$$\tilde{G}^{++} = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$$

et définissons :

$$\tilde{\varphi}^{++} = \varphi^{++}, \quad \tilde{\Phi}^{++}(\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}) = \tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon} \times e^{i\mu^2} \times e^{i\varepsilon}, \quad (\varepsilon \in [0, 2])$$

et

$$\tilde{\Phi}^{++}(\tilde{\pi}_m) = \tilde{\pi}_m \times e^{im^2}, \quad (m \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]).$$

Alors :

Proposition 6.4. *\tilde{G}^{++} définit un surgroupe quadratique, simplement connexe du revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$.*

Remarque: Les orbites coadjointes du groupe $SU(2)$ sont des sphères, leur enveloppe convexe les boules correspondantes. On en déduit immédiatement que l'ensemble moment d'une représentation unitaire irréductible de $SU(2)$ caractérise cette représentation (c.f [Kir, Wil, A-L]). Puisqu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} de dimension inférieure ou égale à 4 est soit résoluble, soit le produit semi direct d'une algèbre de Lie semi simple par un idéal résoluble mais, dans ce dernier cas, les seules possibilités sont :

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}.$$

On a finalement prouvé :

Corollaire 6.1. *Si G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à 4, alors G admet un surgroupe quadratique.*

7. LE GROUPE $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$

Dans cette section, on étudie le cas d'un groupe produit semi direct d'un compact par un sous groupe normal abélien, tel que les invariants repérant les orbites génériques ne sont pas quadratiques mais pour lequel nos méthodes donnent un surgroupe quadratique.

Soit

$$G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4,$$

l'action de $SO(4)$ sur \mathbb{R}^4 étant donnée par l'action usuelle. Son algèbre de Lie \mathfrak{g} est de dimension 10 et est définie par :

$$\mathfrak{g} = \text{Vect} \left(T_i, \ 1 \leq i \leq 4, \ R_{ij}, \ 1 \leq i < j \leq 4 \right),$$

où (T_i) est la base canonique de \mathbb{R}^4 , et R_{ij} la matrice $E_{ij} - E_{ji}$ de $\mathfrak{so}(4)$. Les éléments de \mathfrak{g} vérifient :

$$[R_{ij}, R_{kl}] = \delta_{jk} R_{il} + \delta_{il} R_{jk} - \delta_{jl} R_{ik} - \delta_{ik} R_{jl}$$

et

$$[R_{ij}, T_k] = \delta_{jk}T_i - \delta_{ik}T_j, \quad [T_i, T_j] = 0, \quad \text{avec la convention} \quad R_{ji} = -R_{ij}.$$

L'idéal abélien de \mathfrak{g} est $\mathfrak{a} = \text{Vect}(T_i)$. Pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on note $\ell = (t, r) = (t_i, r_{jk})$. L'action coadjointe est donnée par les champs de vecteurs :

$$R_{ij}^- = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} (\delta_{jk}r_{il} + \delta_{il}r_{jk} - \delta_{jl}r_{ik} - \delta_{ik}r_{jl}) \frac{\partial}{\partial r_{kl}} + t_i \frac{\partial}{\partial t_j} - t_j \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad r_{ji} = -r_{ij}$$

et

$$T_i^- = \sum_{k < l} (\delta_{ik}t_l - \delta_{il}t_k) \frac{\partial}{\partial r_{kl}}.$$

On note $||$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^4 et $u.v$ le produit scalaire des vecteurs u et v . Si $\ell = (t, r)$ est tel que $|t|^2 = \sum t_i^2 \neq 0$, on peut par l'action de $SO(4)$, trouver dans l'orbite de ℓ un vecteur de la forme $((0, 0, 0, |t|), r')$.

L'action du sous groupe $\exp(\text{Vect}(T_1, T_2, T_3))$ permet de se ramener à un point $((0, 0, 0, |t|), (r''_{12}, r''_{13}, r''_{23}, 0, 0, 0))$ de l'orbite de ℓ . Enfin, l'action du sous groupe $SO(3)$ de $SO(4)$ qui laisse stable $(0, 0, 0, |t|)$ permet de se ramener à :

$$\ell_0 = (t_0, r_0) = ((0, 0, 0, |t|), (R, 0, 0, 0, 0, 0)), \quad R^2 = r''_{12}{}^2 + r''_{13}{}^2 + r''_{23}{}^2.$$

Les orbites génériques sont donc celles des points ℓ_0 tels que $|t| > 0$, $R > 0$. Elles sont repérées par les nombres $a = |t|$ et $b = aR$, et sont de dimension 8 (c.f [Raw]). L'algèbre de Lie du stabilisateur de ℓ_0 est :

$$\mathfrak{g}(\ell_0) = \text{Vect}(R_{12}, T_4).$$

La fonction (polynomiale quadratique) $(t, r) \mapsto |t|^2$ est clairement invariante et donne la valeur de a . Posons alors :

$$(r \wedge t)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijkl} r_{jk} t_l,$$

(ε_{ijkl} est nul sauf si $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ et c'est la signature de la permutation (i, j, k, l)). On définit ainsi un vecteur de \mathbb{R}^4 , orthogonal à t et tel que, par exemple :

$$\begin{aligned} R_{12}^-(r \wedge t)_1 &= -(r \wedge t)_2, & T_1^-(r \wedge t)_1 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_2 &= (r \wedge t)_1, & T_1^-(r \wedge t)_2 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_3 &= 0, & T_1^-(r \wedge t)_3 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_4 &= 0, & T_1^-(r \wedge t)_4 &= 0. \end{aligned}$$

La fonction (polynomiale de degré 4) $(t, r) \mapsto |r \wedge t|^2$ est donc invariante et sa valeur sur l'orbite de (t_0, r_0) est $a^2 R^2 = b^2$. On a prouvé que

l'orbite de ℓ_0 est (si $a > 0$ et $b > 0$)

$$\mathcal{O}_{a,b} = G\ell_0 = \{(t, r), \quad \text{tels que } |t|^2 = a^2, \quad |r \wedge t|^2 = b^2\}.$$

Elle est associée à une représentation si elle est entière, c'est-à-dire si $\frac{b}{a}$ est un entier naturel.

En ℓ_0 , une polarisation (complexe) positive est donnée par :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} + \text{Vect}_{\mathbb{C}}(R_{12}, R_{13} - iR_{23}).$$

On associe donc à $G.\ell_0$ l'induite holomorphe du caractère $e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}$:

$$\pi_{a,b} = \text{Ind}_{\exp \mathfrak{p}}^G e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}.$$

Il est plus simple d'effectuer une induction par étage et de réaliser $\pi_{a,b}$ comme l'induite unitaire de la représentation $\rho_{b/a} \times e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}$ du groupe $SO(3) \ltimes \mathfrak{a}$, où $\rho_{b/a}$ est la représentation unitaire de dimension $2\frac{b}{a} + 1$ de $SO(3)$.

De plus on a (c.f [A-L]) :

$$I_{\pi_{a,b}} = \overline{\text{Conv}}(G.\ell_0) \subset \{(t, r), \quad \text{tels que } |t| \leq a\},$$

car la fonction $(t, r) \mapsto |t|^2$ est convexe.

Réciproquement, soient R_1 et R_2 deux nombres positifs. Pour tout s de $]0, 1[$, les points

$$\ell = ((0, 0, 0, a), (0, R_1, 0, 0, 0, 0)) \quad \text{et} \quad \ell' = ((0, 0, a, 0), (R_1, \frac{R_2 - R_1}{1 - s}, 0, 0, 0, 0))$$

sont sur la même orbite, $\mathcal{O}_{a,R_1 a}$, caractérisée par a et R_1 . Le point

$$\ell(s) = s\ell + (1-s)\ell' = ((0, 0, (1-s)a, sa), ((1-s)R_1, R_2 - (1-s)R_1, 0, 0, 0, 0))$$

appartient à l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_{a,R_1 a}$. En faisant tendre s vers 1, on en déduit que le point

$$\ell(1) = ((0, 0, 0, a), (0, R_2, 0, 0, 0, 0))$$

qui est dans l'orbite $\mathcal{O}_{a,R_2 a}$ caractérisée par a et R_2 .

En particulier, $I_{\pi_{a,b}}$ contient l'adhérence de l'union de toutes les orbites $\mathcal{O}_{a,b'}$, qui est $\{(t, r), \quad \text{tels que } |t| = a\}$. Par convexité, pour tout b ,

$$I_{\pi_{a,b}} = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_{a,b}) = \{(t, r), \quad \text{tels que } |t| \leq a\}.$$

Les représentations génériques du groupe G ne sont pas séparées par leur ensemble moment.

Posons maintenant

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}^4 = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad G^+ = G \times \mathbb{R}^4.$$

l'action de G sur l'idéal abélien \mathbb{R}^4 étant simplement l'action usuelle de $SO(4)$ sur \mathbb{R}^4 . Notons (W_i) la base de cet idéal et (t, r, w) un point de \mathfrak{g}^{+*} . On a maintenant, par exemple :

$$\begin{aligned} R_{12}^- &= r_{13} \frac{\partial}{\partial r_{23}} - r_{23} \frac{\partial}{\partial r_{13}} + r_{14} \frac{\partial}{\partial r_{24}} - r_{24} \frac{\partial}{\partial r_{14}} + \\ &\quad + t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial w_2} - w_2 \frac{\partial}{\partial w_1}, \\ T_1^- &= t_2 \frac{\partial}{\partial r_{12}} + t_3 \frac{\partial}{\partial r_{13}} + t_4 \frac{\partial}{\partial r_{14}} \\ W_1^- &= w_2 \frac{\partial}{\partial r_{12}} + w_3 \frac{\partial}{\partial r_{13}} + w_4 \frac{\partial}{\partial r_{14}}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que les fonctions polynomiales suivantes sont invariantes sous l'action de G^+ :

$$(t, r, w) \mapsto |t|^2, |w|^2, t.w, (r \wedge t).w.$$

Maintenant, par action de $SO(4)$, une orbite coadjointe générique de G^+ contient un point de la forme (t_0, r, w_0) avec $t_0 = (0, 0, 0, a)$ ($a > 0$) et $w_0 = (0, 0, w_3, \frac{c}{a})$ ($w_3 > 0$). On a donc, sur cette orbite, $|t| = a$, $w.t = c$ et $|w| = \sqrt{w_3^2 + \frac{c^2}{a^2}} = b$, ou $w_3 = \frac{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}{a} > 0$. En agissant avec l'idéal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, on peut enfin se ramener à $r_0 = (R, 0, 0, 0, 0, 0)$ (R quelconque), on pose donc $d = (r \wedge t).w = Raw_3$, ou $R = \frac{d}{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}$.

Les orbites coadjointes génériques de G^+ sont donc les orbites

$$\mathcal{O}_{a,b,c,d}^+ = \{(t, r, w), \text{ tel que } |t| = a, |w| = b, t.w = c, (r \wedge t).w = d\},$$

pour $a > 0$, $b > 0$, $ab > c$. Elles sont de dimension 10, le stabilisateur de (t_0, r_0, w_0) ayant pour algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g}^+((t_0, r_0, w_0)) = Vect(R_{12}, T_4, \frac{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}{a} T_3 + aW_4, \frac{c}{a} T_3 - aW_3).$$

Définissons maintenant la fonction $\varphi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^{+*}$, polynomiale de degré 2, par $\varphi(t, r) = (t, r, r \wedge t)$. Si $\mathcal{O}_{a,b}$ est une orbite coadjointe générique de G , on a $\mathcal{O}_{a,b} = G.(t_0, r_0)$ et $G^+.\varphi((t_0, r_0)) = \mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+$. On n'a donc pas $G^+.\varphi(\ell_0) = \varphi(G.\ell_0)$. Cependant :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+ \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) &= G^+.\varphi((t_0, r_0)) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) \\ &= \{(t, r, w), |t| = a, |w| = b, w = (r \wedge t)\} \\ &= \varphi(\mathcal{O}_{a,b}). \end{aligned}$$

L'orbite $\mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+$ est entière si et seulement si $\frac{b}{a}$ est un entier naturel, à cette orbite on associe la représentation :

$$\pi_{a,b,0,b^2}^+ = \text{Ind}_{SO(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}}^{G^+} e^{i\frac{b}{a}} \times e^{it_0|_{\mathfrak{a}}} \times e^{i(r_0 \wedge t_0)|_{\mathfrak{b}}}.$$

induite du caractère $\exp(i\frac{b}{a} \times it_0|_{\mathfrak{a}} \times i(r_0 \wedge t_0)|_{\mathfrak{b}})$ du groupe $SO(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ associé à la polarisation $\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ en (t_0, r_0, w_0) .

On note $\Phi(\pi_{a,b})$ cette représentation, son ensemble moment est :

$$I_{\Phi(\pi_{a,b})} = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+).$$

Par convexité des fonctions $t \mapsto |t|^2$ et $w \mapsto |w|^2$, on a immédiatement :

$$I_{\Phi(\pi_{a,b})} \subset \{(t, r, w), |t| \leq a, |w| \leq b\}.$$

Comme l'égalité est atteinte sur $\varphi(\mathcal{O}_{a,b})$, on a :

$$a = \sup\{|t|, (t, r, w) \in I_{\Phi(\pi_{a,b})}\}, \quad b = \sup\{|w|, (t, r, w) \in I_{\Phi(\pi_{a,b})}\}.$$

Les ensembles moments $I_{\Phi(\pi_{a,b})}$ caractérisent donc les représentations $\pi_{a,b}$.

Proposition 7.1.

Le groupe $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ admet un surgroupe quadratique.

REFERENCES

- [A-L] D. Arnal, J. Ludwig : *La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie*, Journal of functional Analysis 105, p. 205-300 (1992).
- [A-S] D. Arnal, M. Selmi : *Séparation des orbites coadjointes d'un groupe exponentiel par leur enveloppe convexe*, Bull. Sci.Math. 132, p. 54-69 (2008).
- [A-K] L. Auslander, B. Kostant : *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. 14, p. 255-354 (1971).
- [Barg] V. Bargmann : *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. of Math. (2) 48, p. 568-640 (1947).
- [Ber] P. Bernat, M. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard, M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographie de la Société Mathématique de France, vol 4, Dunod, Paris, 1972.
- [Doz] J. Dozias, *Sur les algèbres de Lie résolubles, réelles, de dimension inférieure ou égale à 5*, Faculté des sciences de l'université de Paris, thèse 1963.
- [Gon] M-P. Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (Over algebraically closed fields and \mathbb{R})*, University of Waterloo thesis, Waterloo, Canada, (1998) downloadable at <http://etd.uwaterloo.ca/etd/mpgong1998.pdf>.
- [Kir] F. Kirwan, *Convexity property of the moment mapping III*, Invent.Math. 77, p 547-552 (1984).

- [Mag] L. Magnin, *Adjoint and trivial cohomology tables for indécomposable nilpotent Lie algebras of dimension ≤ 7 over \mathbb{C}* , online book, 2d Corrected Edition (2007), (810 pages+ vi).
- [Raw] J. Rawnsley, *Representations of semi direct product by quantization*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 n°2 P.345-350 (1975).
- [Ver] M. Vergne, *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente*, Bull. Soc. Math. Fr 100 p. 301-335 (1972).
- [Wil] N. J. Wildberger, *Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups*, Invent. Math. 98, p. 281-292 (1989).

⁽¹⁾ INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE, UMR CNRS 5584, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES B.P. 47870, F-21078 DIJON CEDEX, FRANCE

E-mail address: Didier.Arnal@u-bourgogne.fr

⁽²⁾ DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNITÉ DE RECHERCHE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE DE HAMMAM SOUSSE, RUE LAMINE ABASSI, 4011 H.SOUSSE, TUNISIE

E-mail address: Mohamed.Selmi@fss.rnu.tn

⁽³⁾ DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNITÉ DE RECHERCHE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR, AVENUE DE L'ENVIRONNEMENT, 5019 MONASTIR, TUNISIE

E-mail address: amel.zergane@u-bourgogne.fr